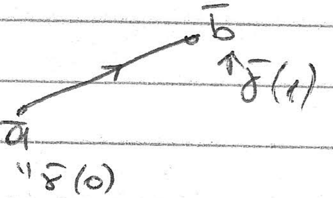
09/05/16.

$\bar\gamma$: κανονική $\Leftrightarrow \bar\gamma: C^1 \wedge \|\bar\gamma'(t)\|>0, \forall t\in[\alpha,\beta]$.
$\bar\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$.

$$L(\bar\gamma):=\int_\alpha^\beta \|\bar\gamma'(t)\|dt$$

π.χ. Το μήκος της $\bar\gamma(t)=\bar a+t(\bar b-\bar a)$, $t\in[0,1]$, $\bar a,\bar b\in\mathbb{R}^n$, $\bar a\neq\bar b$.

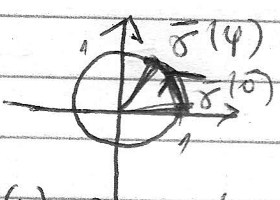


$\bar\gamma'(t)=\bar b-\bar a$

$\|\bar\gamma'(t)\|=\|\bar b-\bar a\|$

$L(\bar\gamma)=\int_0^1\|\gamma'(t)\|dt=\|\bar b-\bar a\|$.

π.χ. $\bar\gamma:[0,\varphi]\to\mathbb{R}^2$ $\bar\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$



$\Rightarrow \bar\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t)\Rightarrow\|\bar\gamma'(t)\|=1\Rightarrow$

$\Rightarrow L(\bar\gamma)=\int_0^\varphi\|\bar\gamma'(t)\|dt=\varphi$ (Αν $\varphi=2\pi\Rightarrow L(\gamma)=2\pi$: το μήκος του μοναδιαίου κύκλου).

Αναπαραμετρικοποίηση:

Ορισμός: Έστω $\bar\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ μία καμπύλη και $\varphi:[A,B]\to[\alpha,\beta]$ να είναι μία 1-1 κ' επί συνεχής συνάρτηση. Τότε λέμε ότι η καμπύλη $\bar J=\bar\gamma\circ\varphi:[A,B]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται αναπαραμετρικοποίηση της $\bar\gamma$.

π.χ.: $\bar\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$: $\bar\gamma(t)=\bar a+t(\bar b-\bar a)$

και $\varphi(s)=2s=t$, $s\in[0,\frac12]\Rightarrow\varphi:[0,\frac12]\to[0,1]$

1-1 κ' επί, συνεχής

και $\bar{J}(s) = (\bar{\gamma} \circ \bar{\varphi})(s) = \bar{\gamma}(\varphi(s)) = \bar{\gamma}(2s) = \bar{a} + 2s(\bar{b} - a)$

όπου $J : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^n$ με $\bar{J}([0, \frac{1}{2}]) = \bar{\gamma}([0,1]) = \{\bar{x} = a + t(\bar{b} - a)$, $t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$

οι εικόνες της J κ' της $\bar{\gamma}$.

$\bar{J}'(s) = 2(\bar{b} - \bar{a}) \Rightarrow \|\bar{J}'(s)\| = 2\|\bar{b} - \bar{a}\|$

~~..........~~ Το $\varphi : [A, B] \to [\alpha, 6]$ λέγεται παραμετρικός μετασχηματισμός.

Αν $\varphi \uparrow$ λέμε ότι ο φ διατηρεί τον προσανατολισμό ενώ αν $\varphi \downarrow$ λέμε ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Ο προσανατολισμός μιας καμπύλης γ είναι "η σειρά" με την οποία διασχίζουμε το $\gamma([\alpha, 6])$

Αν οι $\varphi : [A,B] \to [\alpha, 6]$, $\varphi^{-1} : [\alpha, 6] \to [A,B]$ είναι C^1 λέμε ότι ο φ είναι C^1-παραμετρ. μετασχ. ή διαφορομορφισμός.

Τότε ο φ: διατηρεί τον προσανατολισμό, αν $\varphi'(s) > 0$, $\forall s \in [A,B]$ ενώ αντιστρέφει αν $\varphi'(s) < 0$, $\forall s \in [A,B]$.

Πρόταση: (α) έστω $\bar{\gamma} : [\alpha, 6] \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη κ' $\varphi : C^1$-παρ. μετ.

$\Rightarrow$ Για την $\bar{J} = \bar{\gamma} \circ \varphi : [A,B] \to \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$\bar{J}'(s) = \bar{\gamma}'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$. Αν ο φ διατηρεί τον προσανατ. τότε η καμπύλη και φορά του δ/τος ταχ. παραμένει ίδια (αφού το $\varphi'(s) > 0$) ενώ αν ο φ αντιστρ. τον ~~προσ..~~ καμπύλη του διαν. ταχ., ο προσαν. αλλάζει.

(β) Έστω $\bar{\gamma} : [\alpha, 6] \to \mathbb{R}^n$ C^1, $\varphi : [A,B] \to [\alpha, 6]$ C^1-π.μ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ για την $\bar{J} = \bar{\gamma} \circ \varphi$ $[A,B] \to \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$L(\bar{J}) = \int_A^B \|\bar{J}'(s)\| ds = \int_A^B \|\bar{\gamma}'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds =$$

$$= \int_\alpha^6 \|\bar{\gamma}'(t)\| dt = L(\bar{\gamma})$$ (το μήκος μένει αναλλοίωτο κάτω από αναπαραμετρικοποίηση).

Ορισμός: Έστω $C \subset \mathbb{R}^n$ κ' $\bar{\gamma} : [\alpha, 6] \to \mathbb{R}^n$ μια απλή (δηλ. 1-1) καμπύλη ή απλή κλειστή (δηλ. $\bar{\gamma}(\alpha) = \bar{\gamma}(6)$ κ' $\bar{\gamma} : (\alpha, 6) \to \mathbb{R}^n$ 1-1)

με $\bar{\gamma}([\alpha, 6]) = C$. Τότε ονομάζουμε μήκος τόξου της C το

$$L(C) := L(\bar{\gamma}) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\bar{\gamma}'(t)\| dt$$

Συμπερωτικά: Το θεώρ. Καμπύλης του Jordan:

Κάθε απλή κλειστή ~~καμπ~~ $C \subset \mathbb{R}^2$ (δηλ. για το $C = \bar{\gamma}([\alpha, \beta])$ με $\bar{\gamma}$: απλή κλειστή) διαχωρίζει το συμπλήρωμά της, $\mathbb{R}^2 \setminus C$, σε 2 ανοικτά και συνεκτικά (δηλ. για κάθε 2 σημεία μπορώ να βρω μια καμπύλη που τα ενώνει και βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο σύνολο) υποσύνολα των οποίων αποτελεί το σύνορο και το ένα είναι φραγμένο και ονομάζεται εσωτερικό της καμπύλης C.